Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Základy zkušebnictví

123ZAZK

Základy zkušebnictví

Přednáška 2

Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Základy zkušebnictví

Měření základních veličin

Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Základy zkušebnictví

Měření

= kvantitativní (číselné) vyjádření vlastnosti + jednotky

+ charakterizuje měřenou veličinu významně přesněji než kvalitativní údaje (např. dlouhý, vysoký, těžký)
+ měření lze opakovat a porovnávat
+ výsledek lze zpracovávat matematicky

Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Základy zkušebnictví

Měření základních veličin

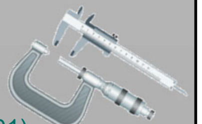
Základní veličiny SI

Veličina	Jednotka	Značka	Rozměr
délka	metr	m	L
hmotnost	kilogram	kg	M
čas	sekunda	s	T
elektrický proud	ampér	A	I
termodynamická teplota	kelvin	K	Θ
látkové množství	mol	mol	N
svítivost	kandela	cd	J

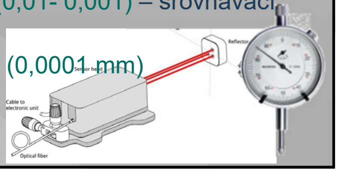
Měření délek

- srovnání měřené délky se stupnicí měřidla
- volba měřidla dle požadované přesnosti

Měřidla - cejchovatelná



- **pásmo** (přesnost 1 – 10 mm)
- **posuvné měřítko** (0,05 - 0,1 mm)
- **mikrometr** (0,05 - 0,1 mm, digit. 0,001)
- **indikátorové hodinky** (0,01- 0,001) – srovnávací měření
- **laserový interferometr** (0,0001 mm)
- **síta** (velikosti otvorů)



Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Měření hmotnosti

- vážení – využití gravitační síly
- **váživost** (max. navážka) a **citlivost**

Typy vah

- **pákové**
  - porovnání hmotnosti váženého předmětu se závažím o známé hmotnosti
  - rovnoramenné, nerovnoramenné, kyvadlové
- **pružinové**
  - deformace pružiny
- **tenzometrické**
  - deformace piezoelektrického prvku

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Měření hmotnosti

Váhy

- analytické (citlivost 0,0001 g, váživost do 200 g)
- přesné
- předvážky (0,01g, 200 – 1000 g)

- speciální
  - váhy sušicí
  - kapesní
  - plošinové,
  - potravinářské
  - průmyslové

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Měření teploty

- nepřímo na základě známých fyzikálních jevů za různých teplot
  - objemová roztažnosti kapalin, délková roztažnosti pevných látek, změna el. odporu

Teploměry

- **kapalinové** (rtuť, líh) – přesnost 0,1 °C
- **bezdotykové** (infračervené záření)
- **termistory** (změna odporu) - Pt - 0,001 °C
- **termočlánky** (termoelektrický jev) – 0,01 °C
- **LC teploměry** (liquid crystal) – 0,1 °C

Měření času

- počítání cyklů periodických dějů o známé délce periody

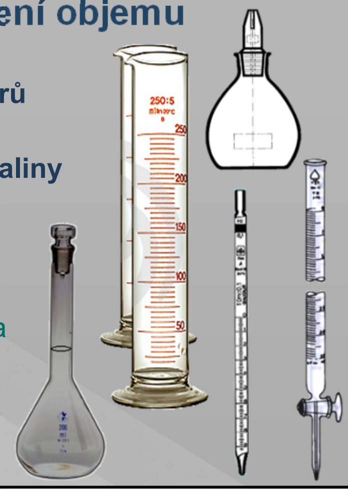
Měřidla (stopky)

- **mechanické** (přesnost 0,2 - 0,3 s)
  - kmity setrvačníku spojeného s pružinou
- **elektrické** (1%)
  - měření času z periodických kmitů v rozvodné síti 50Hz
- **elektronické** (0,0006%)
  - čítač impulzů odvozovaných z elektrického oscilačního obvodu nebo z kmitů křemenného krystalu

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Měření objemu

- **výpočet z rozměrů**
  - pravidelný tvar
- **ponoření do kapaliny**
  - odměrný válec
  - pyknometr
- **objem kapaliny**
  - odměrná baňka
  - pipeta
  - bireta



Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Chyby a nejistoty měření

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Chyby měření

- **každé** měření je nepřesné a ke správné hodnotě se pouze přibližuje → chybu je nutno vyjádřit (jako **nejistotu** měření)
- chyba měření = rozdíl mezi skutečnou hodnotou ***x*** a naměřenou ***x´***
  - **absolutní**

$$\Delta x = x - x'$$

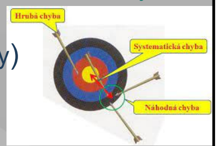
  - **relativní**

$$\partial x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x - x'}{x}$$

Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Základy zkušebnictví

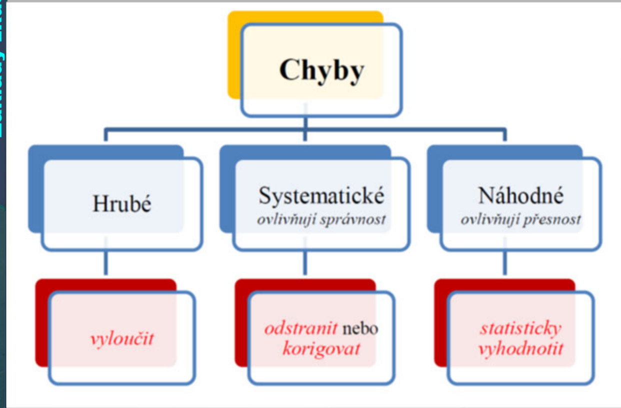
Druhy chyb měření

- **systematické**
  - použití nevhodné (ev. méně vhodné měřicí metody), nepřesné měřidlo, osoba pozorovatele
  - zkreslují výsledek měření pravidelným způsobem
- **náhodné**
  - kolísají náhodně při opakování měření
  - vznik spolupůsobením velkého počtu náhodných vlivů, které nelze předvídat
- **hrubé** (vybočující, odlehlé hodnoty)
  - nesprávné zapsání výsledku
  - náhlý defekt měřicí aparatury,
  - nesprávně nastavený pokus



Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Základy zkušebnictví

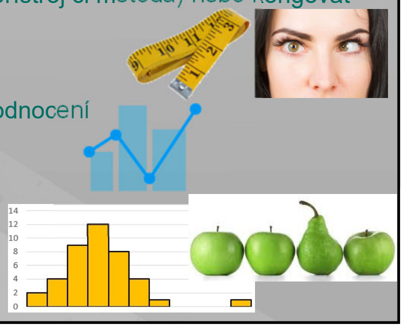
Vyhodnocení výsledků měření



Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Základy zkušebnictví

Korekce chyb

- systematické
  - lze odhadnout jejich velikost i znaménko → lze je odstranit (jiný přístroj či metoda) nebo korigovat
- náhodné
  - statistické vyhodnocení
- hrubé
  - nutno vyloučit



Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Základy zkušebnictví

Korekce hrubých chyb

- **3s-kriterium**
  - vyloučení všech hodnot, které neleží v intervalu $\bar{x} \pm$ *trojnásobek výběrové směrodatné odchylky*

    $x_i \notin (\bar{x} - 3s; \bar{x} + 3s)$
- **Grubbsův** T-test
  - větší počet měření
- **Dean-Dixonův** Q-test
  - n<10

→ testy je potřeba opakovat, dokud nedetekují žádné odlehlé hodnoty

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Grubbsův test

- uspořádání dat vzestupně
  - $x_1 \leq x_2 \leq \ \dots \dots \leq x_n$
- výpočet ***T₁*, *T₂***

$$T_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s} \qquad T_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s}$$

- volba hladiny významnosti α
  - obvykle 0,05 nebo 0,01
- porovnání s kritickou hodnotou $\boldsymbol{T_\alpha}$ (tab.)
- je-li $T_1 > T_\propto$ či $T_n > T_\propto$, pak jsou hodnoty odlehlé

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Dean-Dixonův test

- uspořádání dat vzestupně
  - $x_1 \leq x_2 \leq \ \dots \dots \leq x_n$
- výpočet $\boldsymbol{Q_1}$, $\boldsymbol{Q_n}$

$$Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1} \qquad Q_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$$

- porovnání s kritickou hodnotou $\boldsymbol{Q_\alpha}$ (tab.)
- jestliže $Q_1 > Q_\propto$ či $Q_n > Q_\propto$, pak jsou zkoumané hodnoty odlehlé (s pravděpodobností 1-α)

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Kritické hodnoty pro testy odlehlosti

Počet měření *n*	Grubbsův test $T(n,\alpha)$		Dean-Dixonův Q-test $Q(n,\alpha)$	
	α = 0,05	α = 0,01	α = 0,05	α = 0,01
3	1,412	1,416	0,941	0,988
4	1,689	1,723	0,765	0,889
5	1,869	1,955	0,642	0,760
6	1,996	2,130	0,560	0,698
7	2,093	2,265	0,507	0,637
8	2,172	2,374	0,468	0,590
9	2,237	2,464	0,437	0,555
10	2,294	2,540	0,412	0,527
11	2,343	2,606		
12	2,387	2,663		
13	2,426	2,714		
14	2,461	2,759		
15	2,493	2,800		
16	2,523	2,837		
17	2,551	2,871		
18	2,557	2,903		
19	2,600	2,932		
20	2,623	2,959		

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Krok stranou – statistika

Statistika

- Opakovaná měření → **statistický soubor**

Pojmy:

- **jev**
  - souhrn skutečností popisující určitý děj (např. porušení tělesa)
- **náhodná veličina**
  - jev je způsobován veličinou, jejíž hodnotu nelze předem určit (např. napětí při porušení)
- **základní soubor**
  - všichni nositelé daného jevu
- **náhodný výběr**
  - soubor, který reprezentuje celý základní soubor

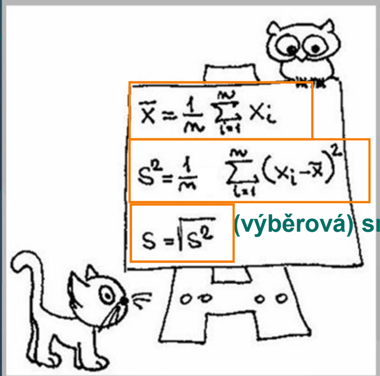
Statistika
Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Základní veličiny

Soubory :	**4, 8, 6**	**2, 5,11**
Průměr	**$\bar{x}$ = 6**	**$\bar{x}$ = 6**
Odchylky	-2,+2, 0	-4,-1,+5
Součet odchylek	0	0
Mocniny odchylek	4, 4, 0	16, 1, 25
Součet mocnin	8	42
Rozptyl	**2,67**	**14**
Směrodatná odchylka	**1,63**	**3,74**

Statistika
Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Základní veličiny



průměr

výběrový rozptyl

(výběrová) směrodatná odchylka
(jednoho měření)

Statistika
Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Směrodatná odchylka

- **míra statistického rozptylu**
  - ukazuje, jak moc se od sebe navzájem liší jednotlivé hodnoty v souboru zkoumaných čísel
  - malá směrodatná odchylka → prvky souboru jsou si většinou navzájem podobné, velká směrodatná odchylka → velké vzájemné odlišnosti
- u náhodných chyb klesá s počtem měření

výběrová směrodatná odchylka: (jednoho měření) $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{(n-1)}}$

směrodatná odchylka: (jednoho měření) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$

Směrodatná odchylka

- pro větší počet měření - **výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru** (střední kvadratická chyba aritmetického průměru)

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Poznámka:

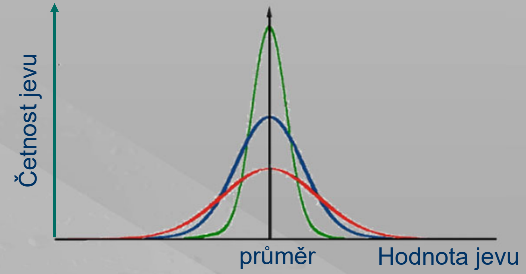
- kalkulačky + Excel počítají většinou směrodatnou odchylku (σ, σ_n) + výběrovou směr. odchylku (s, σ_{n-1}) jednoho měření
- výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru:

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}$$

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Statistika

Normální rozdělení

- běžný základní soubor má **normální rozdělení** podle **Gaussovy křivky**

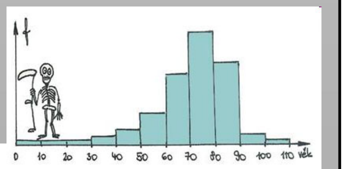


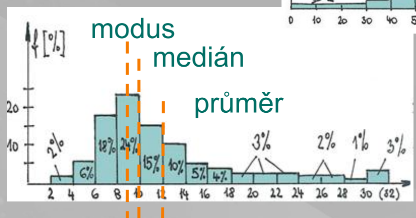
- čím užší a vyšší je Gaussova křivka, tím statisticky homogennější je soubor (tj. tím přesnější je měření)

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Statistika

Jiná rozdělení

- nesymetrické rozdělení

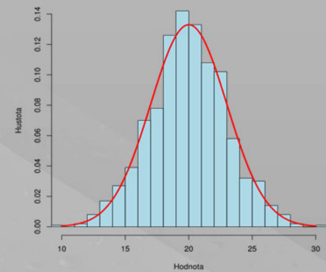


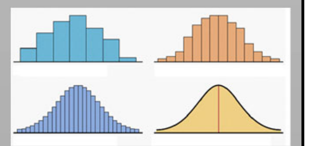


Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze
Statistika

Histogram

- náhodný výběr – **histogram**





- čím početnější soubor, tím víc se středy sloupců přibližují Gaussově křivce

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

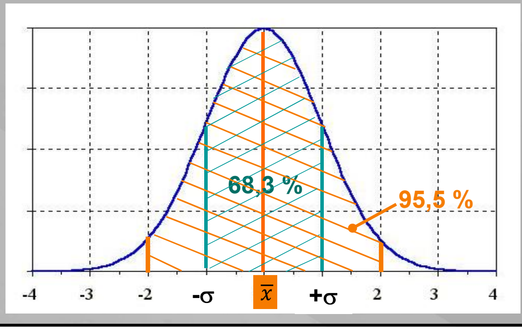
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Statistika

Interval spolehlivosti

- interval, ve kterém bude ležet hodnota měřené veličiny se zvolenou pravděpodobností P

$\langle \bar{x} - t_{P,n}.\bar{s}; \bar{x} + t_{P,n}.\bar{s} \rangle$, *kde* $t_{P,n}$ je Studentův součinitel



Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Statistika

Studentův součinitel

- závisí na pravděpodobnosti *P* a počtu měření *n*

	$t(P,n)$			
n	$P = 68{,}3\%$	$P = 95{,}0\%$	$P = 99{,}0\%$	$P = 99{,}73\%$
3	1,32	4,30	9,92	19,21
4	1,20	3,18	5,84	9,22
5	1,15	2,78	4,60	6,62
6	1,11	2,57	4,03	5,51
7	1,09	2,45	3,71	4,90
8	1,09	2,37	3,50	4,53
9	1,07	2,31	3,36	4,27
10	1,06	2,26	3,25	4,09
11	1,06	2,23	3,17	3,96
12	1,05	2,20	3,11	3,85
15	1,04	2,15	2,98	3,63
20	1,03	2,08	2,86	3,45
30	1,02	2,05	2,76	3,28
50	1,01	2,01	2,68	3,16
100	1,00	1,98	2,63	3,08
∞	1,00	1,96	2,58	3,00

- krajní chyba aritmetického průměru $t_{P,n}.\bar{s}$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Nejistota měření

- parametr přiřazený k výsledku měření, udávající interval, ve kterém by se měla skutečná hodnota nacházet s určitou (dohodnutou) pravděpodobností
- ČSN EN 45 001: kvantitativní výsledky měření a zkoušek musí být uváděny včetně stanovených nejistot měření (všude, kde je to možné)

→ Mezinárodní výbor pro míry a váhy: **Guide to the Expression of Uncertainty in measurement** (GUM), 1992

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

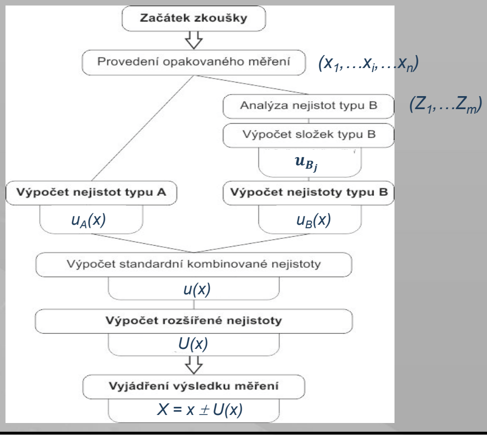
Standardní nejistota měření *u*

Standardní nejistota zahrnuje:

- **nejistoty stanovené metodou A u_A**
  - způsobovány náhodnými vlivy, jejichž příčiny nejsou známy
  - stanovují se z opakovaných měření určité hodnoty dané veličiny za stále stejných podmínek na základě **statistického přístupu**
  - jejich hodnota se zmenšuje se zvětšujícím se počtem opakovaných měření
- **nejistoty stanovené metodou B u_B**
  - známé a odhadnutelné příčiny - přesnost přístrojů, vliv použitých konstant, korekce…
  - vyžadují velmi dobrou znalost příslušné metody měření

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Stanovení nejistoty při přímém měření (veličina x)



Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Přímé měření

Stanovení nejistot typu A

- výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru

$$u_A = \bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

- pokud $n < 10$

$$u_A = k_{uA} . \bar{s},$$

kde k_{uA} je koeficient rozšíření

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10 a více
k_{uA}	7	2,3	1,7	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Přímé měření

Stanovení nejistot typu B

Postup:

1. identifikace zdrojů nejistot $Z_1, Z_2, \dots Z_m$
2. určení nejistoty každého zdroje
   - hodnoty z technické dokumentace
   - odhadem – odchylka Z_{max_j}
3. výpočet jednotlivých odchylek u_{B_j}
4. Výpočet celková standardní nejistoty typu B pro veličinu X ze všech zdrojů

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Přímé měření

Zdroje nejistot

- nedokonalost měřících prostředků
  - etalony, typ přístroje, kalibrace, vnitřní tření, rozlišitelnost odečtu ….
- použitá měřící metoda
  - průvodní jevy (ohřátí, interakce s měřeným objektem…)
- nestálost podmínek měření
  - vliv prostředí, elektrické či magnetické pole…
- vliv operátora
  - osobní zvyklosti, lidské teplo…
- použité konstanty a vztahy (závislosti) při vyhodnocování
  - zanedbání či zaokrouhlení

Přímé měření

Odhad nejistoty zdroje Z_j

- odhad maximálního rozsah odchylek $\pm Z_{max_j}$ od nominální hodnoty (tak aby pravděpodobnost překročení byla co nejmenší)
- posouzení průběhu pravděpodobnosti v tomto intervalu a nalezení vhodné aproximace – typ rozdělení
  - normální (Gaussovo) rozdělení
  - rovnoměrné rozdělení
  - trojúhelníkové rozdělení
- standardní nejistota typu B pro j-tý zdroj

$$u_{B_j} = \frac{z_{max_j}}{\chi_j}$$

Odhad odchylky Z_{max}

- z výrobních údajů
  - třída přesnosti
  - chyba udávaná výrobcem
  - výrobní tolerance
- čtení stupnice přístroje
  - odhad čtení na polovinu dílku → odhad chyby 0,5 dílku
  - odhad čtení na desetiny dílku → odhad chyby 0,1 až 0,2 dílku
  - má-li přístroj pomocnou stupnici (nonius) → odhad chyby na polovinu zlomku (n-tiny) hlavního dílku

Odhad chyby běžných měřidel

Měřidlo	Velikost jednoho dílku	Počet dílků pomocné stupnice	Přesnost čtení	Příklad	Odhad chyb
skládací metr	1 mm		1 mm	843 mm	± 1 mm
ocelové měřítko	1 mm		0,1 mm	174,6 mm	± 0,2 mm
posuvné měřítko	1 mm	10	0,05 mm	83,85 mm	± 0,05 mm
mikrometr	0,5 mm	50	0,005 mm	12,115 mm	± 0,005 mm
stopky	0,1 s	-	0,1 s	36,9 s	± 0,2 s
teploměr	0,2 °C	-	0,1 °C	21,7 °C	± 0,1 °C
stupnice anal. vah	1 d	-	0,5 d	9,5 d	± 0,5 d
obchodní váhy	5 g	-	2,5 g	325 g	± 3 g

posuvné měřítko: $odhad\ chyby = \left(\frac{1}{10}.1\right)/_2 = 0{,}05\ mm$

mikrometr: $odhad\ chyby = \left(\frac{1}{50}.0{,}5\right)/_2 = 0{,}005\ mm$

Přímé měření

Typy rozdělení

- rovnoměrné rozdělení
  - kterákoliv odchylka od jmenovité hodnoty se může vyskytovat se stejnou pravděpodobností
  - nejčastěji používané
- normální (Gaussovo) nebo trojúhelníkové rozdělení
  - častěji se vyskytují malé odchylky od jmenovité hodnoty veličiny a s rostoucí velikostí odchylek klesá pravděpodobnost jejich výskytu
  - spolehlivý výrobce, u kterého lze předpokládat malé chyby u většiny přístrojů
- bimodální rozdělení
  - u měřících přístrojů zařazených výrobcem do určité třídy přesnosti

Přímé měření

Typy rozdělení

Rozdělení	z_{max}	χ
Normální - Gaussovo	a	3
	b	2
Trojúhelníkové-Simpsonovo	a	$\sqrt{6}$ ~ 2,45
Lichoběžníkové	a při $b=\frac{a}{3}$	~ 2,32
	a při $b=\frac{a}{2}$	~ 2,19
	a při $b=\frac{2a}{3}$	~ 2,04
Rovnoměrné - pravoúhlé	a	$\sqrt{3}$ ~ 1,73
Bimodální (trojúhelníkové)	a	$\sqrt{2}$ ~ 1,41
Bimodální (Diracovo)	a	1

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Přímé měření

Nejistota typu B ze všech zdrojů Nekorelované zdroje

- všechny zdroje mají stejné jednotky

$$u_B = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[u_{B_j}\right]^2}$$

- zdroje s odlišnými charakteristickými veličinami (i jednotkami) – přepočet pomocí koef. citlivosti c_{xj}

$$u_{Bj} = c_j . u_{Bj} \qquad c_j = \frac{\partial x}{\partial z_j} \qquad u_B = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 \left[u_{B_j}\right]^2}$$

  - $z_j = [z_{j1}, z_{j2}, \dots . z_{jm}]$ jsou aktuální hodnoty zdroje Z
- c_j lze zjistit i experimentálně změřením hodnoty Δx_{zj} při malé změně Δz_j $\quad c_j = \frac{\Delta x_{zj}}{\Delta z_j}$

Přímé měření

Nejistota typu B ze všech zdrojů

Korelace mezi zdroji (Z_j a Z_k)

$$u_B(x)^2 = \sum \left(c_{xj}{}^2 u_{Bj}{}^2 + c_{xk}{}^2 . u_{Bk}{}^2\right) + 2 \sum c_{xj} . c_{xz} . u_{Bj} . u_{Bz} . r_{xj,xk}$$

kde $r_{xj,xk}$ určuje korelaci (velmi obtížné stanovení)

Přímé měření

Standardní nejistota

- **kombinovaná standardní nejistota *u***

$$u = \sqrt{u_A{}^2 + u_B{}^2}$$

  - relativně nízká pravděpodobnost (cca 66%) - pro praxi nevhodná

- **rozšířená standardní nejistota *U***

$$U = k_u . u$$

  - konvenčně k_u = 2 až 3 nebo výpočtem (podle počtu měření)
  - zvyšuje pravděpodobnost (90 - 100%)

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Nepřímé měření

Nepřímé stanovení nejistot

- hledaná veličina Y je stanovena pomocí přímo měřených veličin (X_1,..X_n) prostřednictvím funkčního vztahu

$$Y = f(X_1, \ldots X_n)$$

- $\bar{y}$ se vypočítá dosazením aritmetických průměrů jednotlivých veličin do příslušné funkce
- výpočet kombinované standardní nejistoty pro každé $X_i \rightarrow \boldsymbol{u_{xi}}$
- určení nejistoty hledané veličiny z Gaussova zákona šíření nejistot

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Nepřímé měření

Zákon šíření nejistot

- **nezávislé veličiny X_i**

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_i}\right)^2 . u(x_i)^2}$$

- závislé veličiny $X_{i,}$ X_j

$$u_y{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_i}\right)^2 . u(x_i)^2 +$$
$$2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_i} \frac{\partial f(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_j}\right) C(x_i x_j) \ ,$$

kde $C(x_i x_j)$ je kovariance veličin X_i a X_j

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Vyjádření výsledků

$$X = (\bar{x} \pm u) \ jednotka$$

Zásady:

- zaokrouhlení nejistoty ***u*** na **max. 2 platná čísla**
- zaokrouhlení výsledku měření tak, aby nejistota opravovala poslední platnou cifru výsledků

Základy zkušebnictví
Katedra materiálového inženýrství

Vyjádření výsledků - příklady

Nesprávný zápis	*Co je špatně*	*Správný zápis*
k = (92,43231 ± 2,450661) N/m	*není zaokrouhleno*	k = (92 ± 2) N/m
b = (0,00460 ± 0,0000424) m	*není zaokrouhleno, příliš mnoho nul*	b = (4,60 ± 0,04) mm b = (4,60 ± 0,04) ·10^{-3} m
R = (1653,2 ± 19,3) Ω	*není zaokrouhleno*	R = (1650 ± 20) Ω
m = (198,4351 ± 0,04) g	*není zaokrouhleno* $\bar{m}$	m = (198,44 ± 0,04) g
E = (1,639·10^3 ± 3) MPa	*různé řády*	E = (1639 ± 3) MPa
k_B = (1,391·10^{-23} ± 7·10^{-26}) J/K	*různé řády*	k_B = (1,391± 0,007) ·10^{-23} J/K
d = 35 ± 6 m	*chybí závorky*	d = (35 ± 6) m
a = 4,038 cm ± 0,02 mm	*různé jednotky*	a = (40,38 ± 0,02) mm
F = 235 ± 3 % N	*za ± se uvádí absolutní chyba*	F = (235 ± 7) N
R = (1600000 ± 300000) Ω	*příliš mnoho nul*	R = (1,6 ± 0,3) MΩ

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – přímé měření

Př. Stanovení hodnoty odrazu Schmidtovým tvrdoměrem

č. měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
čtení [-]	**33**	**35**	**36**	**40**	**34**	**36**	**38**	**34**	**36**	**38**

Aritmetický průměr: $\bar{x} = 36\ [-]$

Výběrová směrodatná odchylka: $s = 2{,}160\ [-]$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – přímé měření

Vyloučení odlehlých hodnot:

- seřazení: 33, 34, 34, 35, 36, 36, 36, 38, 38, 40
- **3s-kriterium** $(\bar{x} - 3s; \bar{x} + 3s)$:

  $(36 - 3 \times 2{,}16; 36 + 3 \times 2{,}16) = (\mathbf{29{,}5}; \mathbf{42{,}4})$
- **Grubbsův test:**

$T_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s} = \frac{36-33}{2{,}16} = \mathbf{1{,}39},\ T_{10} = \frac{x_n - \bar{x}}{s} = \frac{40-36}{2{,}16} = \mathbf{1{,}85}$

– $T_{10;0{,}05} = \mathbf{2{,}294}\ (tab.)$; $\quad \boldsymbol{T_1, T_{10} < T_{10;0{,}05}}$

- **Dean-Dixonův test:**

$Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1} = \frac{34-33}{40-33} = \mathbf{0{,}143};\ Q_{10} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} = \frac{40-38}{40-33} = \mathbf{0{,}286}$

– $Q_{10;0{,}05} = \mathbf{0{,}412}\ (tab.)$; $\quad \boldsymbol{Q_1, Q_{10} < Q_{10;0{,}05}}$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – přímé měření

Standardní nejistota typu A

- koeficient rozšíření = 1

$$u_A = \bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}16}{\sqrt{10}} = \mathbf{0{,}683}\ [-]$$

Standardní nejistota typu B

Zdroje nejistot	Z_{maxj}	rozdělení	χ	u_{Bj}
Nej. spojená s přípravou zkoušky	0,35	Gaussovo	2	0,175
Chyba čtení přístroje	0,5	rovnoměrné	√3	0,289
Nejistota kalibrace přístroje	0,8	Gaussovo	2	0,400

$$u_B = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[u_{B_j}\right]^2} = \sqrt{0{,}175^2 + 0{,}289^2 + 0{,}400^2} = \mathbf{0{,}523}\ [-]$$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – přímé měření

- kombinovaná standardní nejistota

  $u = \sqrt{{u_A}^2 + {u_B}^2} = \sqrt{0{,}683^2 + 0{,}523^2} = \mathbf{0{,}860}\ [-]$
- rozšířená standardní nejistota

  $U = k.u = 2\,.\,0{,}860 = \mathbf{1{,}72}\ [-]$

  po zaokrouhlení $U = \mathbf{2}\ [-]$
- výsledek měření:

  $\boldsymbol{X} = (\bar{x} \pm U) = \mathbf{36 \pm 2}\ [-]$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – nepřímé měření

Př. Stanovení pevnosti betonu v tlaku

- zkušební vzorky - 3x kostka 150 mm

číslo měření	síla [kN]	rozměr a [mm]	rozměr b [mm]
1	974	149,3	150,0
2	997	150,2	150,1
3	1006	149,1	149,8

$$R_c = \frac{F}{A} = \frac{F}{a.b}\ [N.mm^{-1}]$$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – nepřímé měření

Síla:

- nevyloučeny žádné odlehlé výsledky $n = 3$
- aritmetický průměr: $\bar{F} = 992\ [kN]$
- výběrová směrodatná odchylka: $s(F) = 16{,}50\ [kN]$
- koeficient rozšíření $k_{uA} = 2{,}3$
- **nejistota typu A**

$$\boldsymbol{u_A(F) = k_{uA}} . \frac{s(F)}{\sqrt{n}} = 2{,}3 . \frac{16{,}5}{\sqrt{3}} = \mathbf{21{,}91}[kN]$$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – nepřímé měření

Síla:

- **nejistota typu B**

Zdroje nejistot	Z_{maxj}	rozdělení	χ	u_{Bj}
Chyba čtení přístroje	0,5	rovnoměrné	√3	0,289
Nejistota kalibrace přístroje*	2,97	Gaussovo	2	1,480

$$u_B(F) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[u_{B_j}(F)\right]^2} = \sqrt{0{,}289^2 + 1{,}480^2} = 1{,}507[kN]$$

* z kalibračního listu: **0,3 % z naměřené hodnoty**

$Z_{max} = 0{,}003.992 = 2{,}97\ kN$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – nepřímé měření

Síla:

- **kombinované standardní nejistota**

$$u(F) = \sqrt{u_A(F)^2 + u_B(F)^2} = \sqrt{21{,}91^2 + 1{,}507^2} = \mathbf{21{,}96}\ [kN]$$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie
Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – nepřímé měření

Rozměry a,b:

Rozměr	a	b
počet platných měření	3	3
průměr	149,5 mm	150 mm
výb. směrodatná odchylka	0,59 mm	0,15 mm
koeficient rozšíření	2,3	2,3

- **nejistota typu A**

$$\boldsymbol{u_A(a)} = k_{uA}.\frac{s(a)}{\sqrt{n}} = 2{,}3\,.\frac{0{,}59}{\sqrt{3}} = \mathbf{0,78}[mm]$$

$$\boldsymbol{u_A(b)} = 2{,}3\,.\frac{0{,}15}{\sqrt{3}} = \mathbf{0,2}[mm]$$

Příklad – nepřímé měření

Rozměry a,b:

- **nejistota typu B**

Zdroje nejistot (stejné pro a i b)	Z_{maxj}	**rozdělení**	χ	u_{Bj}
chyba čtení	0,05	rovnoměrné	√3	0,029
teplotní roztažnost	0,001	rovnoměrné	√3	0,00058
přesnost měřidla	0,01	rovnoměrné	√3	0,00577
nejistota kalibrace	0,01	Gaussovo	2	0,005

$$u_B(a) = u_B(b) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[u_{B_j}\right]^2} = \mathbf{0,030}\ [mm]$$

Příklad – nepřímé měření

Rozměry a,b:

- **kombinovaná standardní nejistota**

$$u(a) = \sqrt{u_A(a)^2 + u_B(a)^2} = \sqrt{0{,}78^2 + 0{,}03^2} = \mathbf{0,78}[mm]$$

$$u(b) = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}03^2} = \mathbf{0,20}[mm]$$

Příklad – nepřímé měření

Pevnost v tlaku:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x_1,\dots x_n)}{\partial x_i}\right)^2 .\,u(x_i)^2}$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial F} = \frac{1}{a.b} = \frac{1}{149{,}5\,.\,150{,}0}.1000 = 0{,}0446$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial a} = -\frac{F}{a^2.b} = -\frac{992}{149{,}5^2\,.\,150{,}0}.1000 = -0{,}2959$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial a} = -\frac{F}{a.b^2} = -\frac{992}{149{,}5\,.\,150{,}0^2}.1000 = -0{,}2951$$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – nepřímé měření

Pevnost v tlaku:

- všechny měřené veličiny jsou navzájem nekorelované

$$u(R_c) = \sqrt{\frac{\partial R_c}{\partial F}^2 . u(F)^2 + \frac{\partial R_c}{\partial a}^2 . u(a)^2 + \frac{\partial R_c}{\partial b}^2 . u(b)^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}0446^2 . 21{,}96^2 + (-0{,}2959)^2 . 0{,}78^2 + (-0{,}2951)^2 . 0.2^2} = \mathbf{1{,}008\ N/mm^2}$$

- **rozšířená nejistota**

$$U(R_c) = k . u(R_c) = 2 . 1{,}008 = \mathbf{2{,}016\ N/mm^2}$$

Základy zkušebnictví

Katedra materiálového inženýrství a chemie

Stavební fakulta ČVUT v Praze

Příklad – nepřímé měření

Pevnost v tlaku

- **průměrná pevnost:**

$$\overline{R_c} = \frac{\overline{F}}{\overline{a} . \overline{b}} = \frac{992.1000}{149{,}5 . 150{,}0} = 44{,}2\ [N . mm^{-1}]$$

- **výsledek:**

$$\boldsymbol{R_c} = (\overline{R_c} \pm U(R_c)) = \mathbf{44{,}0 \pm 2{,}0}\ [N . mm^{-1}]$$